

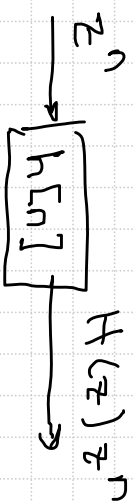
Objetivos:

Definir a transformada T

Definir a região de convergência (ROC)

Discutir a importância da ROC

Caso geral:



Prova:

$x[n] = z^n$, z dado

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] z^{n-k} = z^n \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] z^{-k}$$

• Definição: transformada z

$$\mathcal{Z}\{h[n]\} = H(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] z^{-k}$$

- Note que somaória pode não convergir
- Note que, como z é dado, $H(z)$ é constante.
- Diferentes valores de z levam a diferentes ganhos.

Região de convergência: valores de z para os quais $\sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]z^{-n}$ converge.

Exemplo: $h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n z^{-n} =$$

$$ROC: \{z \in \mathbb{C}, |z| > \frac{1}{2}\}$$

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{2z}} \quad \left| \frac{1}{2z} \right| < 1$$

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{z^n} \\ \boxed{h[n]} \end{array} \rightarrow z^n \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]z^{-n}$$

$\Rightarrow$ Se $z \notin ROC$, saída é infinita

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{z^n} \\ \boxed{h[n]} \end{array} \rightarrow y[n] = \begin{cases} H(z)z^n & z \in ROC \\ \infty & z \notin ROC \end{cases}$$

Exemplo: $g[n] = -\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1]$

Determine $G(z)$ e ROC

Solução: $u[-n-1] = 0$ se $-n-1 < 0 \Rightarrow n > -1$

$$\Rightarrow G(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} -\left(\frac{1}{2}\right)^n z^{-n} = - \sum_{n=-\infty}^{-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{-n} z^{-n} = - \sum_{k=1}^{\infty} (2z)^k$$

$$= -(2z + (2z)^2 + \dots) = -2z \left(1 + 2z + \dots\right) = -2z \cdot \frac{1}{1 - 2z} \quad |2z| < 1$$

$$= \frac{1}{1 - 1/2z}$$

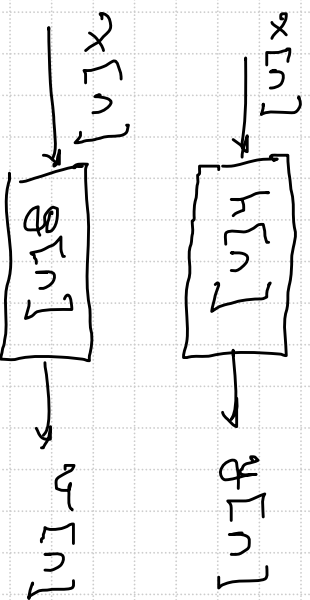
$$|2z| > 1$$

Lemma: $h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \Rightarrow H(z) = \frac{1}{1 - 1/2z} \quad \left|\frac{1}{2z}\right| < 1$

$\Rightarrow g[n]$ e $h[n]$ possuem mesma transformada Z, só diferem na ROC

$\Rightarrow$ Se olhando para $\frac{1}{1 - 1/2z}$, não sei qual a ROC, preciso saber $h[n]$ ou $g[n]$.

Problema:



Determine $g[n]$ e $v[n]$ para $x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n$ e 2^n

So usando: $z = \frac{1}{4} \notin \text{ROC de } h[n] \Rightarrow g[n] = \infty$

$$\text{ROC: } \left| \frac{1}{2z} \right| < 1, \text{ mas } \left| \frac{1}{2 \times \frac{1}{4}} \right| = 2 > 1$$

$$z = \frac{1}{4} \in \text{ROC de } g[n] \Rightarrow v[n] = 5\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

$$= \frac{1}{1 - \frac{1}{2^{1/4}}} = -\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

$$z = 2 \in \text{ROC de } h[n] \Rightarrow g[n] = 4(2)2^n = \frac{1}{1 - \frac{1}{2^{1/2}}} 2^n$$

$$= \frac{4}{3} 2^n$$

$$z = 2 \notin \text{ROC de } g[n] \Rightarrow v[n] = \infty$$

$$\text{ROC: } |2z| < 1, \text{ mas } |2 \times 2| = 4 > 1$$