Objetivos:

Definir a transformada Z

Definir a região de convergência (ROC)

Discutir a importância da ROC

Caso geral:

$$z^n \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow H(z)\,z^n$$

Prova:

$x[n] = z^n$, z dado

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\, z^{n-k} = z^n \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\, z^{-k}$$

- Definição: transformada Z

$$\mathcal{Z}\{h[n]\} = H(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\, z^{-k}$$

- Note que somatória pode não convergir
- Note que, como z é dado, $H(z)$ é constante.
- Diferentes valores de z levam a diferentes ganhos.

Região de convergência: valores de z para os quais $\sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] z^{-n}$ converge.

Exemplo: $h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$ ROC: $\{z \in \mathbb{C},\ |z| > \frac{1}{2}\}$

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n z^{-n} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2z}} \qquad \Uparrow \qquad \left|\frac{1}{2z}\right| < 1$$

$$z^n \rightarrow \boxed{h[n]} \rightarrow z^n \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] z^{-n}$$

$\Rightarrow$ Se $z \notin$ ROC, saída é infinita

$$\Rightarrow z^n \rightarrow \boxed{h[n]} \rightarrow y[n] = \begin{cases} H(z) z^n & z \in \text{ROC} \\ \infty & \text{c.c.} \end{cases}$$

Exemplo: $g[n] = -\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1]$

Determine $G(z)$ e ROC

Solução: $u[-n-1] = 0$ se $-n-1 < 0 \Rightarrow n > -1$

$$\Rightarrow G(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} -\left(\frac{1}{2}\right)^n z^{-n} \overset{k=-n}{=} -\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{-k} z^{k} = -\sum_{k=1}^{\infty} (2z)^k$$

$$= -\left(2z + (2z)^2 + \cdots\right) = -2z\left(1 + 2z + \cdots\right) = -2z \, \frac{1 \times 1/2z}{1-2z \times 1/2z}$$

$$= \frac{1}{1 - 1/2z} \qquad |2z| < 1$$

$$|2z| > 1 \Leftrightarrow$$

Lembrando: $h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \Rightarrow H(z) = \frac{1}{1 - 1/2z} \quad \left|\frac{1}{2z}\right| < 1$

$\Rightarrow$ $g[n]$ e $h[n]$ possuem mesma transformada Z, só diferem na ROC

$\Rightarrow$ Só olhando para $\dfrac{1}{1-1/2z}$, não sei qual a ROC, preciso saber $h[n]$ ou $g[n]$.

Problema:

$$x[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n]$$

$$x[n] \longrightarrow \boxed{g[n]} \longrightarrow v[n]$$

Determine $y[n]$ e $v[n]$ para $x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n$ e 2^n

Solução: $z = 1/4 \notin$ ROC de $h[n] \Rightarrow y[n] = \infty$

ROC: $\left|\frac{1}{2z}\right| < 1$, mas $\left|\frac{1}{2 \times 1/4}\right| = 2 > 1$

$z = \frac{1}{4} \in$ ROC de $g[n] \Rightarrow v[n] = G\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^n$

$$= \frac{1}{1 - \frac{1}{2\,1/4}} = -\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

$z = 2 \in$ ROC de $h[n] \Rightarrow y[n] = H(2)\, 2^n = \frac{1}{1 - \frac{1}{2 \times 2}}\, 2^n$

$$= \frac{4}{3}\, 2^n$$

$z = 2 \notin$ ROC de $g[n] \Rightarrow v[n] = \infty$

ROC: $|2z| < 1$, mas $|2 \times 2| = 4 > 1$